Medida de Erdös

João Carmona

Universidade de Cabo Verde - Universidade de Lisboa

26 de Setembro de 2012

$0 < \lambda < 1$

$$0 \leq \quad \sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i \quad \leq \frac{1}{1-\lambda} =: \ell_\lambda$$

$x_i = 0 \quad x_i = 1$

distribuição

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i \in [0, \ell_\lambda] := \mathrm{I}_\lambda$$

$B \subset \mathrm{I}_\lambda$,

$$P\left\{\sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i \in B\right\}$$

$$P\{x_i = 0\} = P\{x_i = 1\} = \frac{1}{2}$$

x_i, x_j independentes se $i \neq j$.

probabilidade de Bernoulli

P é a probabilidade de Bernoulli, em

$$2^{\mathbb{N}} := \{(x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots) : x_i = 0, 1\}$$

caracterizada por

$$P(x_0 = a_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} = a_{n-1}) = \frac{1}{2^n}$$

para qualquer $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in 2^n$.

medida de Erdös, o problema

$B \subset \mathrm{I}_\lambda$

$$\nu_\lambda(B) := P\left\{\sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i \in B\right\}$$

*

$\mathcal{L}_\lambda$:=medida de Lebesgue restringida a I_λ e normalizada.

*

Se $\nu_\lambda \perp \mathcal{L}_\lambda$, dizemos que λ é singular

Se $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$, dizemos que λ é regular

cronologia dos principais resultados

- 1935 Jessen e Wintner:
  $\forall\lambda \in (0,1)$,

  $$\nu_\lambda \perp \mathcal{L}_\lambda \quad \vee \quad \nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$$

  $$\nu_\lambda \text{ não tem átomos}$$

- 1935 Kershner e Winter:

  $$\lambda < 1/2 \quad \Rightarrow \quad \nu_\lambda \perp \mathcal{L}_\lambda$$
  $$\mathrm{Spt}(\nu_\lambda) \text{ é um conjunto de Cantor}$$

- 1935 Wintner:

  $$\lambda = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \nu_\lambda = \mathcal{L}_\lambda$$

  $$\lambda = \sqrt[n]{1/2} \quad \Rightarrow \quad \nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$$

cronologia dos principais resultados

- 1939 Erdos:

$$\lambda^{-1} \text{ é número Pisot} \quad \Rightarrow \quad \nu_\lambda \perp \mathcal{L}_\lambda$$

  Número de Pisot é todo o inteiro algébrico, real maior que 1, cujos conjugados têm módulo inferior a 1.

- 1940 Erdos:

  Existe $a < 1$ tal que:
  Para quase todo o $\lambda \in (a, 1)$, $\quad \nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$.

  Conjetura:
  $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$ para quase todo o $\lambda > 1/2 \quad$?

- Garsia 1962:

  Se λ^{-1} é número de Garsia, então $\quad \nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$.

  Número de Garsia é todo o algébrico inteiro α tal que, sendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ os seus conjugados:

$$|\alpha|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m| > 1 \quad \wedge \quad \alpha\alpha_1 \ldots \alpha_m = \pm 2$$

cronologia dos principais resultados

- 1995 Solomyak:

  Confirma a conjetura de Erdös:
  $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$ para quase todo o $\lambda > 1/2$.

- 1998 Mauldin e Simon

$$\nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \nu_\lambda \equiv \mathcal{L}_\lambda$$

não se sabe:

- Até hoje não se conhece outros parâmetros regulares além dos de Garsia.
- Nem se conhece outros singulares em $\left(\frac{1}{2},1\right)$, além dos de Pisot;
- Tão-pouco se sabe se é singular ou regular

$$\lambda \in \mathbb{Q} \cap \left(\frac{1}{2},1\right).$$

outros critérios:

- 1962 Garsia:

  Se $\exists n \in \mathbb{N}, B \subset K_n$:

  $$a \neq b \quad \wedge \quad \frac{b^a(1-b)^{1-a}}{a^a(1-a)^{1-a}} \cdot \#K_n \cdot \lambda^n < 1$$

  então λ é singular.
  onde:

  $$K_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} x_i \lambda^i : x \in \{0,1\}^n \right\} \quad b := \frac{\#B}{\#K_n}$$

  $$A := \left\{ x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=0}^{n-1} x_i \lambda^i \in B \right\} \quad a := \frac{\#A}{2^n}$$

- Se λ^{-1} é Pisot então esta hipótese é satisfeita (?)

outros critérios:

- 2012 (c?)

  Se $\nu_\lambda \equiv \mathcal{L}_\lambda$ então $\nu_{\lambda^{1/d}} \equiv \mathcal{L}_\lambda$, $\forall d \in \mathbb{N}$

  Se $\nu_\lambda \perp \mathcal{L}_\lambda$ então $\nu_{\lambda^d} \perp \mathcal{L}_\lambda$, $\forall d \in \mathbb{N}$

outros critérios:

- 2012 (c?)

  Se $(\sup_n f_n) \in L^1(\mathrm{I}_\lambda)$ então $\nu_\lambda \equiv \mathcal{L}_\lambda$
  onde:

$$f_n := Q^n(1_\lambda)$$

$$1_\lambda(t) := \frac{d\mathcal{L}_\lambda}{dx} = \begin{cases} 1-\lambda & se \quad t \in \mathrm{I}_\lambda \\ 0 & se \quad t \notin \mathrm{I}_\lambda \end{cases}$$

$$(Qf)(t) := \frac{f(\frac{t}{\lambda}) + f(\frac{t-1}{\lambda})}{2\lambda}$$

transformada de Fourier

- $\widehat{\nu_\lambda}(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+e^{-it\lambda^k}}{2}$
- $\widehat{D\nu_\lambda}(t) = \|D\nu_\lambda\|_1 \cdot \widehat{\nu_\lambda}(t)$
- Prova de Erdos 1939
  Se $\lambda^{-1} < 2$ é Pisot, $|\mathbb{Z} - \lambda^{-k}| < r^k$ $(r < 1)$,

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\nu_\lambda}(-2\pi\lambda^{-n})\right| &= \prod_{k=0}^{n} \left|\frac{1+e^{2\pi i\lambda^{k-n}}}{2}\right| \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{1+e^{2\pi i\lambda^{-k}}}{2}\right| \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1+e^{2\pi i\lambda^{k}}}{2}\right| \\
&\geq \prod_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1+e^{2\pi i\lambda^{-k}}}{2}\right| \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1+e^{2\pi i\lambda^{k}}}{2}\right| > 0
\end{aligned}$$

ponto fixo e aproximação

$$x_o + x_1\lambda + x_2\lambda^2 + \ldots \in B$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\big[(x_0 = 0) \wedge (x_1\lambda + x_2\lambda^2 + \ldots \in B)\big]$$

$$\vee$$

$$\big[(x_0 = 1) \wedge (1 + x_1\lambda + x_2\lambda^2 + \ldots \in B)\big]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[(x_0 = 0) \wedge \left(x_1 + x_2\lambda + \ldots \in \frac{B}{\lambda}\right)\right]$$

$$\vee$$

$$\left[(x_0 = 1) \wedge \left(x_1 + x_2\lambda + \ldots \in \frac{B-1}{\lambda}\right)\right]$$

ponto fixo

- $\nu_\lambda(B) = \frac{\nu_\lambda(\frac{B}{\lambda})+\nu_\lambda(\frac{B-1}{\lambda})}{2}$
- $\nu_\lambda = T\nu_\lambda$
- $D\nu_\lambda(t) = \frac{D\nu_\lambda(\frac{t}{\lambda})+D\nu_\lambda(\frac{t-1}{\lambda})}{2\lambda}$
- $D\nu_\lambda = Q(D\nu_\lambda)$
- $(Qf)(t) := \frac{f(\frac{t}{\lambda})+f(\frac{t-1}{\lambda})}{2\lambda}$ (operador de Perron)
- $T = \lambda Q$
- $DT\mu = QD\mu$

- $\mu, \nu \in \mathcal{M} := \{$probabilidades de Borel em $\mathrm{I}_\lambda\}$

$$L(\mu,\nu) := \sup \left\{ \int_{\mathrm{I}_\lambda} \phi d\mu - \int_{\mathrm{I}_\lambda} \phi d\nu : \phi \in Lip^1(\mathrm{I}_\lambda, \mathbb{R}) \right\}$$

- $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}$:

$$L(\mu_n,\mu) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathrm{I}_\lambda} \varphi d\mu_n \to \int_{\mathrm{I}_\lambda} \varphi d\mu \,, \quad \forall \varphi \in C(\mathrm{I}_\lambda)$$

($\Leftrightarrow$: $\mu_n \rightharpoonup \mu$)

unicidade do ponto fixo

- $L(T\mu, T\nu) \leq \lambda L(\mu, \nu)$
- ν_λ é o único ponto fixo de T em $\mathcal{M}$
- $T^n\mu \rightharpoonup \nu_\lambda$ para qualquer $\mu \in \mathcal{M}$

aproximação singular

$$\nu_n(B) := \frac{\#\left\{x \in 2^n : \sum_{i=0}^{n-1} x_i \lambda^i\right\}}{2^n}$$

$$\nu_\lambda(B) := P\left\{\sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i \in B\right\}$$

$$\nu_n(a,b) \to \nu_\lambda(a,b)$$

$$\nu_n = T^n \nu_0 \rightharpoonup \nu_\lambda$$

a prova de Garsia:

- Sendo $\alpha = \lambda^{-1}$ um número de Garsia, prova-se por métodos algébricos que as somas finitas,

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \lambda^i$$

ficam distintas com um afastamento minorado por $c2^{-n}$ ($c > 0$).

- $\nu_n(a, b) \leq C(b - a) + 2^{-n}$
- $\nu_\lambda(a, b) \leq C(b - a)$
- $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}_\lambda$

densidades

- $\mathcal{M} := \{\text{probabilidades de Borel em } \mathrm{I}_\lambda\}$
- $\mathcal{M}_\ll := \{\mu \in \mathcal{M} : \mu \ll \mathcal{L}_\lambda\}$
- $\mathcal{D} := \left\{f \in L^1(\mathrm{I}_\lambda) : \|f\|_1 \leq 1\right\}$
- $\mathcal{D}_1 := \{f \in \mathcal{D} : \|f\|_1 = 1\}$

- $\frac{d}{dx} : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$
- $\frac{d}{dx} : \mathcal{M}_\ll \leftrightarrow \mathcal{D}_1$ (homeomorfismo para as topologias fracas)
- $1_\lambda := \frac{d\mathcal{L}_\lambda}{dx}$

densidades

- λ é singular $\quad\Leftrightarrow\quad D\nu_\lambda = 0$
- λ é regular $\quad\Leftrightarrow\quad \|D\nu_\lambda\|_1 = 1$
  $\Leftrightarrow\quad Q$ tem ponto fixo não nulo em $L^1(\mathrm{I}_\lambda)$

- $Q^n f \rightharpoonup D\nu_\lambda$ para qualquer $f \in \mathcal{D}_1$

aproximação regular

- $T^n \mathcal{L}_\lambda \quad \rightharpoonup \quad \nu_\lambda$
- $Q^n D\mathcal{L}_\lambda =: f_n \quad \rightharpoonup \quad D\nu_\lambda$
- $f_n(t) = \frac{\nu_n(t-\lambda^n \mathrm{I}_\lambda)}{\mathcal{L}(t-\lambda^n \mathrm{I}_\lambda)}$
- $f_n(t) \to D\nu_\lambda(t) \quad \text{qtp } t \in \mathrm{I}_\lambda \quad ?$

2012 Kempton:

- $f(t) := \liminf f_n(t) \qquad F(t) := \limsup f_n(t)$
- $0 \leq f \leq F \leq 2D\nu_\lambda \leq 2\|D\nu_\lambda\|_\infty \cdot f \qquad (\text{qtp em } \mathrm{I}_\lambda)$
- $F = \|F\|_1 \cdot D\nu_\lambda$
- $F = 0 \quad \Rightarrow \quad D\nu_\lambda = 0$
- $f = \|f\|_1 \cdot D\nu_\lambda$
- $(f = 0 \wedge D\nu_\lambda \in L^\infty(\mathrm{I}_\lambda)) \Rightarrow D\nu_\lambda = 0$
- 2 conjeturas:
  λ singular $\quad \Rightarrow \quad f_n(t) \to 0 \qquad$ qtp $t \in \mathrm{I}_\lambda$
  λ regular $\quad \Rightarrow \quad f_n(t) \to D\nu_\lambda(t) \qquad$ qtp $t \in \mathrm{I}_\lambda$

β-expansões

$(\beta = \lambda^{-1})$

$$\mathcal{N}_n(t)$$

é o número de sequências $x \in 2^n$, prolongáveis a $2^{\mathbb{N}}$ como λ-expansão de t, isto é, tais que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \lambda^i = t.$$

- 2011 Feng e Sidorof

  Se $\lambda^{-1} < 2$ é Pisot, então,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\mathcal{N}_n(t)} < 2\lambda$$

3 consequências

- Se $(\sup_n f_n) \in L^1(\mathrm{I}_\lambda)$, então $\quad \nu_\lambda \equiv \mathcal{L}_\lambda$
- Se λ é singular, então $\quad f_n(t) \to D\nu_\lambda = 0 \quad$ qtp $t \in \mathrm{I}_\lambda$ (confirmando a primeira conjetura de Kempton)
- demonstração do critério de Erdös por outra via:

  Observando que $\mathcal{N}_n(t) = 2^n \lambda^n \ell_\lambda f_n(t)$, podemos concluir que:

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-1} \text{ é Pisot} \quad & \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{N}_n(t)} < 2\lambda \\
& \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(t)} < 1 \\
& \Rightarrow \quad F = 0 \\
& \Rightarrow \quad \lambda \text{ é singular.}
\end{aligned}
$$

1ª decomposição associativa (fatorização)

- $$x \to \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \lambda^i = \sum_{i<d} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{dn+i} \lambda^{dn} \right) \lambda^i$$

$$P \quad \to \quad P \times \ldots \times P \quad \to \quad \nu_{(\lambda^d)} \times \ldots \times \nu_{(\lambda^d)} \quad \to \quad \nu_\lambda$$

- $\nu_{\lambda^d} \ll \mathcal{L} \Rightarrow \nu_{(\lambda^d)} \times \ldots \times \nu_{(\lambda^d)} \ll \mathcal{L}^d \Rightarrow \nu_\lambda \ll \mathcal{L}$
- $\nu_\lambda \ll \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \nu_{\sqrt[d]{\lambda}} \ll \mathcal{L}$

2ª decomposição associativa (fatorização)

$$x \to \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\lambda^i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i<d} \vec{x}_{dn+i}\lambda^i \right) \lambda^{dn}$$

(usado para demonstrar o critério de singularidade de Garsia)

métrica δ_λ e dimensão de $Spt(K_\lambda)$

- $\lambda \geq 1/2 \quad \Rightarrow \quad Spt(K_\lambda) = \mathrm{I}_\lambda$
- $\lambda < 1/2 \quad \Rightarrow \quad \dim(K_\lambda) = \frac{\log 1/2}{\log \lambda}$
- $\delta_\lambda(x, y) := \lambda^{D(x,y)}$

  onde, para $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$,

$$D(x, y) := \sup \{n \in \mathbb{N} : x|_n = y|_n\}$$